BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Х.А.САЛАМОВ
Бакинский Государственный Университет

В данной работе строится класс единственности и разрешимости смешанных задач для некоторых классов нелинейных эволюционных уравнений в неограниченных областях. Доказывается неравенство типа Сен Венана для обобщенных решений рассматриваемой задачи. Устанавливаются энергетические априорные оценки, с помощью которых изучаются решения задач в классах функций, растущих на бесконечности.

В работе рассматривается широкий класс нелинейных уравнений в неограниченных областях. В случае линейности операторов, входящих, в уравнение, теория разрешимости смешанных задач в ограниченных цилиндрических областях хорошо изучена [1]-[4]. Если правая часть уравнения достаточно быстро убывает на бесконечности, то имеются результаты и в случае неограниченных областей. Кроме того, имеются результаты в неограниченных областях не только для не убывающих на бесконечности данных, но и при их определенным росте. Найдены растущие решения краевых задач для эллиптических уравнений в работах [5], [6], а в работах [7]-[9] для параболических уравнений; в работе [10] для стационарных систем Навье-Стокса и Стокса получен ряд результатов в этом направлении.

Пусть Ω - неограниченная область из R^n ($n \ge 2$) с некомпактно кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T < \infty$, $\partial Q_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

Рассмотрим следующий класс нелинейных эволюционных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x,u,u_x) u_{x_j} \right) + a(t,x)u -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_{ij}(t,x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(b(t,x)u \right) = f(t,x) \tag{1}$$

со следующими начальными и краевыми условиями

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{\partial Q_T} = 0, \tag{3}$$

где относительно коэффициентов предполагается, что $a_{ij}(t,x,u,p)$, $b_{ij}(t,x)$, $(i,j=1,\dots,n)$ измеримые вещественнозначные ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

$$\nu_0|\xi|^2 \le a_{ij}(t,x,u,p)\xi_i\xi_j \le \nu_1|\xi|^2, \qquad \nu_0>0, \tag{4}$$

$$\mu_0|\xi|^2 \le b_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \mu_1|\xi|^2, \qquad \mu_0>0, \tag{5}$$

$$a_{ij}(t,x,u,p) = a_{ji}(t,x,u,p), \tag{6}$$

$$|\ a(t,x)\ | \le \mu_1, \ |b(t,x)\ | \le \mu_2. \tag{7}$$

Введём следующие пространства обобщенных функций. Пусть Ω - ограниченная область, $Q_T=\Omega\times(0,T)$. Через $W_2^{1,1}(Q_T)$ обозначим подпространство элементов $u(x,t)\in L_2(Q_T)$, для которых конечна норма

$$\|u\|^2_{W_2^{1,1}(Q_T)} = \int_{Q_T}\left(|u_x|^2+|u|^2+|u_t|^2+|u_{xt}|^2\right)dxdt.$$

$\overset{0}{H}{}_2^{2,0}(Q_T)$ - подпространство элементов $u(x,t)\in W_2^{2,0}(Q_T)$, для которых $u_t\in W_2^{2,0}(Q_T)$ и $\|u\|_{H_2^{2,0}}=\|u\|_{W_2^{2,0}}+\|u_t\|_{W_2^{2,0}}$.

Обобщенным решением задачи (1)-(3) из пространства $\overset{0}{H}{}_2^{2,0}(Q_T)$ назовем функцию $u(x,t)\in \overset{0}{H}{}_2^{2,0}(Q_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}\left[u_{tt}v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x,u,u_x)u_{x_j}v_{x_i}+a(t,x)uv+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(t,x)u_{tx_j}v_{x_j}-b(t,x)uv_t\right]dxdt=$$
$$=\int_{Q_T}f(t,x)dxdt \tag{8}$$

для всех $v\in \overset{0}{H}{}_2^{2,0}(Q_T)$.

Примем следующие обозначения. Для любого r>0
$Q_t(r)=\Omega_r\times(0,T),\quad \Omega_r=\Omega\cap B_r,$
$B_r=\{x:|x|<r\},\quad \Omega_{r_1,r_2}=\Omega_{r_2}\setminus\Omega_{r_1},\quad Q_T(r_1,r_2)=\Omega_{r_1r_2}\times(0,T),$
$S_r=\partial\Omega_r\setminus\partial\Omega.$

Геометрию ∂Q_T будем описывать основной частотой

$$\lambda_2^2(r) = \inf \left(\int_{S_r} \left| \nabla_s v \right|^2 dS \right) \left(\int_{S_r} v^2 dS \right)^{-1},$$

где нижняя грань берется по всем $v \in C^1$ в окрестности S_r, $v = 0$ в окрестности $S_r \times (0,T)$, $\nabla_s v$ - проекция вектора ∇v на гиперплоскость, касательную к S_r в точке x.

Лемма 1._Пусть $f(|x|)$ -произвольная измеримая локально ограниченная функция в Ω, тогда для функций $v(x) \in \overset{0}{W}{}^1_{2,loc}(\Omega)$ при произвольных $0 \le r_1 < r_2 < \infty$ имеет место оценка

$$\int_{\Omega_{r_1,r_2}} |v(x)|^2 f(|x|) dx \le \int_{\Omega_{r_1,r_2}} \lambda_2^{-2}(|x|) |\nabla v(x)|^2 f(|x|) dx.$$

Выберем непрерывные функции $\mu(r) > 0,\ \psi(r) = 1 + \varphi(r) > 1,\quad \forall r > r_0 > 0$, которые определяются геометрией области Ω и параметрами входящими в коэффициенты уравнения, для которых выполняются следующие неравенства при $r>r_0>0$

$$r\varphi(r) \quad (\lambda_2(r) + \mu(r)) \equiv h_0(r) \ge h_0, \tag{9}$$

$$r\varphi(r)\mu(r) \equiv h_1(r) \ge h_1, \tag{10}$$

$$\mu^2(r\varphi(r)) - \mu^2(r) \le \ln H_0 (2T)^{-1}, \tag{11}$$

где $h_0 > 0,\ h_1 > 0,\ 1 < H_0 < \infty$ фиксированные постоянные. Также предположим, что существует постоянная $\nu>0$ такая, что для любого $r>r_0$ имеет место соотношение

$$(\varphi(r))^{-1} \inf_{r<s<r\varphi(r)} \varphi(s) \ge \nu > 0. \tag{12}$$

Установим энергетические априорные оценки типа принципа Сен-Венана, с помощью которых изучаются решения задач в классах функций растущих на бесконечности..

Теорема 1. Предположим, что относительно коэффициентов уравнения (1) выполняются условия (4)-(7) и, кроме того, $a_{ij}(t,x)$ дифференцируемы по t и $\left| \frac{\partial}{\partial t} a_{ij}(t,x) \right| \le \mu_3 < \infty \quad \forall (x,t) \in Q_T$ и $f(x,t) \equiv 0$ в $Q_T(r_0, r'_0)$. Тогда для обобщенного решения $u(x,t) \in H^2_{2,loc}(Q_T)$ задачи (1)-(3) существуют зависящие лишь от известных параметров задачи постоянные $1 < \mu_0 < \infty,\ 1 < k_0 < \infty$, такие, что если функции $\mu(r) > \mu_0$ и $\psi(r) = 1 + \varphi(r)$ удовлетворяют условиям (9)-(12), то

$$\mathrm{I}(r_2) > \theta \mathrm{I}(r_1) \exp\left(\nu \ln \theta^{-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{s\varphi(s)} \right),$$

для любого $r_0 < r_1 < r_2 < r_0'$, здесь $g_r(t) = \exp(-2\mu^2(r)t)$, $\theta < 1$ зависит лишь от известных величин и

$$\mathrm{I}(r) = \int_{\Omega_T(r)} \left[\left|\nabla u_t\right|^2 + \mu^2(r)(u_t^2 + u^2 + \left|\nabla^2 u\right|^2) \right] g_r(t)dxdt .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О.А. О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики. Мат. Сб., 1958, т.45, №2, с.123-158
2. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: 1972.
3. Lions J.L., Strauss W. Some nonlinear evolution equations // Bull.Soc. Math. France.1965, т.93, p.43-96.
4. Prodi G. Soluzioni periodiche dell'equazine delle onde con bermine dissipativo nonlineare.// Band. Sem. Mat. Padova. 1965. т.35
5. Ландис Е.М. О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Труды Московского мат. об-ва, 1974, т.31, с.35-58.
6. Oleinik O.A., Iosifian G.A. Boundary value problems for second order elliptic equations in unbounded domains and Saint-Venant's principle. // Annali Scuda Noem. Super. de Pisa, Ser.iv, 1977, т.4, p. 269-290.
7. Камынин Л.И. О существовании решений задач Коши и линейных краевых задач для параболического уравнения II порядка в неограниченной области. // Диф. Ур-я, 1987, т. 23, №11, с. 1937-1948.
8. Максимова М.И. Существование слабого решения параболической начально-краевой задачи в неограниченной области в классе быстрорастущих функций. // Зап. Науч. Сем. ЛОМИ 1983, т. 127, с. 152-157.
9. Слепцова И.Л., Шишков А.Е. О существовании растущих на бесконечности обобщенных решений краевых задач для линейных параболических уравнений высокого порядка. Изв. Вузов. Математика, 1988, №4, с. 61-69.
10. Ладыженская О.А., Солонников В.А. О нахождении решений краевых задач для стационарных уравнений Стокса и Новье-Стокса, имеющих н т. 96, с. 117-160.
11. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.И. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: 1967.
12. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений. УМН, 1978, т.33, №5, с.7-76.

QEYRİ-XƏTTİ TƏKAMÜL TƏNLİKLƏR QEYRİ-MƏHDUD OBLASTLARDA

H.A.SALAMOV

XÜLASƏ

İşdə qeyri-məhdud oblastlarda qeyri-xətti təкamül tənliкləri sinfi üçün qarışıq məsələlərin yeganəliк və həllolunma sinfi qurulur. Ümumiləşmiş həll üçün Sen Venan tipli bərabərsizliк alınır. İşdə energetiк aprior qiymətləndirmələr alınır və onların кöməкliyilə sonsuzluqda artan funкsiyalar sinfində məsələlərin həlli öyrənilir.

NON LINEAR EVOLUTIONAL EQUATIONS IN UNBOUNDED AREAS

H.A.SALAMOV

SUMMARY

In the current work we build the classes of uniqueness and solvability of mixed problems for the some classes of non linear evolutional equations in the unbounded areas. It's proved San Venan type disparity for generalized solutions of the problem. Determined energetic priori estimation and with the help of them we study a solution of the problems from the classes of functions which grow on infinity.